Poglavlje 7

APPROVED

INTEGRALI (korigirano)

U ovom poglavlju:

- Tablica i svojstva integrala
- Metoda supstitucije
- Parcijalna integracija
- Integriranje trigonometrijskih funkcija
- Integriranje racionalnih funkcija

> Svaka nova vrsta otkrića jest matematička po obliku, jer ne postoji drugo rukovodstvo koje možemo imati – *C. G. Darwin* (1931)

Integral dane funkcije $y = f(x)$ u oznaci $\int f(x)dx$ je jedna nova funkcija $y = F(x)$ čija je derivacija jednaka zadanoj funkciji $y = f(x)$, odnosno vrijedi:

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \frac{d}{dx}F(x).}$$

Pritom se $\int f(x)dx$ još zove *antiderivacija* ili *primitivna funkcija* ili *neodređeni integral* funkcije $y = f(x)$, dok danu funkciju $y = f(x)$, koju integriramo, zovemo još i *podintegralna* funkcija. Na primjer, primitivna funkcija funkcije $f(x) = x$ je funkcija $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ jer je njena derivacija upravo jednaka $f(x) = x$, što kratko pišemo:

$$\int xdx = \tfrac{1}{2}x^2 \; .$$

Opisno rečeno, kao da primitivna funkcija $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ živi u "prošlosti" jer tek kad je deriviramo, dobivamo njenu "sadašnjost", odnosno funkciju $f(x) = x$.

Primijetimo da se rezultat integriranja ne mijenja ako dobivenom rezultatu dodamo proizvoljnu konstantu C, odnosno vrijedi:

$$\int f(x)dx = F(x) + \mathrm{C} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \frac{d}{dx}(F(x) + C) = \frac{d}{dx}F(x),$$

jer je derivacija od konstante C jednaka nuli. Preciznije, za primitivne funkcije dane funkcije vrijedi sljedeći rezultat:

♣<u>Teorem 14.</u> Neka su $y = F(x)$ i $y = G(x)$ dvije primitivne funkcije dane funkcije $y = f(x)$. Tada postoji konstanta C takva da vrijedi: $F(x) - G(x) = C$. Opisno rečeno, sve primitivne funkcije jedne iste funkcije se razlikuju za proizvoljnu konstantu. ♣

Nije lako napamet reći što je to $\int f(x)dx$, kao u sljedećim primjerima:

i) $\int \cos x dx = \sin x$ jer je $\cos x = (\sin x)'$;

ii) $\int e^x dx = e^x$ jer je $e^x = (e^x)'$;

iii) $\int \frac{1}{x} dx = \ln x$ jer je $\frac{1}{x} = (\ln x)'$;

iv) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x$ jer je $\frac{1}{\cos^2 x} = (\operatorname{tg} x)'$.

Naime, dovoljno je samo malo promijeniti podintegralnu funkciju, pri čemu više ne možemo napamet riješiti pripadne integrale, kao u primjerima: $\int \sin^2 x dx$, $\int x e^x dx$, $\int \ln x dx$ i sličnim.

Štoviše, malom promjenom podintegralne funkcije možemo dobiti integrale koje je nemoguće eksplicitno riješiti bez upotrebe jačeg analitičkog aparata, kao što su Taylorovi redovi i slično. Na primjer: $\int \sin x^2 dx$ ili $\int e^{x^2} dx$. U ovakvim situacijama važno je znati da li uopće postoji integral, o čemu govori sljedeći rezultat.

♣<u>Teorem 15.</u> Ako je podintegralna funkcija $y = f(x)$ neprekidna na nekom intervalu (a,b), tada postoji neodređeni integral $F(x) = \int f(x)dx$ na intervalu (a,b). ♣

Prema ovome možemo zaključiti da je integriranje znatno zahtjevnije od deriviranja, gdje nije bilo velike razlike u deriviranju među sličnim funkcijama, kao što su, na primjer: $\sin x$, $\sin^2 x$, te $\sin x^2$. Sve se one lako i na sličan način deriviraju, dok se potpuno različito integriraju: prva lako, druga osrednje, dok treća znatno teže.

Da bismo olakšali proces integriranja nekih funkcija, možemo koristiti:
1. tablicu integriranja osnovnih funkcija (to je "anti - tablica" tablici deriviranja);
2. svojstva integrala (samo dva svojstva);
3. metode supstitucije i parcijalne integracije (metodama se ne rješava integral nego se zamjenjuje odgovarajućim jednostavnijim).

7.1 TABLICA I SVOJSTVA INTEGRALA

Svojstva integrala su malobrojna te toliko prirodna, da nismo ni svjesni kada ih koristimo:

i) homogenost:
$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx;$$

ii) linearnost:
$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Prema ovim svojstvima, potrebno je podintegralnu funkciju rastaviti na što više dijelova jer to odgovara integriranju, što nismo morali raditi kod deriviranja. Na primjer:

$$((1+x^2)^2)' = 4x(1+x^2),$$

što je metodološki različito u odnosu na

$$\int (1+x^2)^2\,dx = \int (1+2x^2+x^4)\,dx = \int 1dx + 2\int x^2 dx + \int x^4 dx,$$

odnosno za razliku od derivacije, integral "čeka" da se podintegralna funkcija rastavi na što više elementarnih dijelova.

Budući da je integral jednak antiderivaciji, tablicu integrala osnovnih funkcija tretiramo kao "anti – tablicu" tablici deriviranja. Naime, u tablici deriviranja smo pisali da je $(\sin x)' = \cos x$, dok ćemo u tablici integriranja pisati: $\int \cos x dx = \sin x$, i tako redom za ostale funkcije iz tablice deriviranja, pa dobivamo sljedeću tablicu integriranja:

$y = f(x)$	$\int f(x)dx$	$y = f(x)$	$\int f(x)dx$
$x^n, n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\text{arc tg } x$
$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\|$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\text{arc ctg } x$
e^x	e^x	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\sin x$	$-\cos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$
$\cos x$	$\sin x$	$\frac{1}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a}\text{arc tg}\frac{x}{a}$
$\text{sh } x$	$\text{ch } x$	$-\frac{1}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a}\text{arc ctg}\frac{x}{a}$
$\text{ch } x$	$\text{sh } x$	$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin\frac{x}{a}$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\text{tg } x$	$-\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arccos\frac{x}{a}$
$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\text{ctg } x$	$a^x, 0 < a \neq 1$	$\frac{a^x}{\ln a}$

Pročitati sljedeće riješene zadatke pa ih ponovno riješiti samostalno i bez gledanja.

454. $\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + c = \frac{x^4}{4} + c.$

455. $\int \frac{1}{x^5}dx = \int x^{-5}dx = \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + c = -\frac{1}{4}x^{-4} + c = \frac{-1}{4x^4} + c$.

456. $\int \sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$.

457. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \int \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}dx = \int x^{-\frac{2}{3}}dx = \frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} + c = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + c = 3\cdot\sqrt[3]{x} + c$.

458. $\int (\frac{3}{x} + \sqrt[4]{x})dx = 3\int \frac{1}{x}dx + \int x^{\frac{1}{4}}dx = 3\ln|x| + \frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}} + c = 3\ln|x| + \frac{4}{5}\cdot\sqrt[4]{x^5} + c$.

459. $\int (2\sqrt{x} - 7\sqrt[3]{x^5} + \sqrt[4]{x^3})dx = 2\int x^{\frac{1}{2}}dx - 7\int x^{\frac{5}{3}}dx + \int x^{\frac{3}{4}}dx = \frac{4}{3}\sqrt{x^3} - \frac{21}{8}\sqrt[3]{x^8} + \frac{4}{7}\sqrt[4]{x^7} + c$.

460. $\int x^4(2 - 3x + x^3)dx = \int 2x^4dx - 3\int x^5dx + \int x^7dx = \frac{2}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{8}x^8 + c$.

461. $\int 2(1+3x^2)^2dx = 2\int (1 + 6x^2 + 9x^4)dx = 2\int dx + 12\int x^2dx + 18\int x^4dx =$

$= 2x + 4x^3 + \frac{18}{5}x^5 + c$.

462. $\int \frac{(3x-2)^2}{x^3}dx = \int \frac{9x^2 - 12x + 4}{x^3}dx = 9\int \frac{1}{x}dx - 12\int \frac{1}{x^2}dx + 4\int \frac{1}{x^3}dx =$

$= 9\ln|x| + \frac{12}{x} - \frac{2}{x^2} + c$.

463. $\int \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2}}dx + \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \int x\cdot x^{-\frac{2}{3}}dx + \int x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{2}{3}}dx =$

$= \int x^{\frac{1}{3}}dx + \int x^{-\frac{1}{6}}dx = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + c$.

464. $\int \frac{(x+\sqrt[3]{x})^2}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{x^2 + 2x\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{x^2 + 2x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}}dx = \int x^{\frac{3}{2}}dx + 2\int x^{\frac{5}{6}}dx + \int x^{\frac{1}{6}}dx$

$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{12}{11}x^{\frac{11}{6}} + \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} + c = \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + \frac{12}{11}\sqrt[6]{x^{11}} + \frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} + c$.

Napomena: uvijek nakon određenog broja zadataka treba napraviti pauzu, jer nije toliko važna količina urađenih zadataka, koliko je važna kvaliteta i način na koji se oni rješavaju. To znači, ako vam popusti koncentracija, odmori malo (šetnja oko stola)!

465. $\int (3x^5 - \frac{4}{x^7} + 2^x)dx = 3\int x^5dx - 4\int x^{-7}dx + \int 2^xdx = \frac{1}{2}x^6 + \frac{2}{3}x^{-6} + \frac{2^x}{\ln 2} + c =$

$= \frac{1}{2}x^6 + \frac{2}{3x^6} + \frac{2^x}{\ln 2} + c$.

466. $\int (2\cos x - \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x} - 5\sin x)dx = 2\int \cos x dx - 3\int \frac{1}{x^2}dx + 4\int \frac{1}{x}dx - 5\int \sin x dx =$

$= 2\sin x + \frac{3}{x} + 4\ln|x| + 5\cos x + c$.

467. $\int(\frac{2}{\cos^2 x}-\frac{3}{\sin^2 x}+4\text{sh }x)dx=2\int\frac{1}{\cos^2 x}dx-3\int\frac{1}{\sin^2 x}dx+4\int\text{sh }xdx=$
$=2\text{tg }x+3\text{ctg }x+4\text{ch }x+c$.

468. $\int\frac{2\cdot 3^x+3\cdot 2^x}{5^x}dx=2\int(\frac{3}{5})^x dx+3\int(\frac{2}{5})^x dx=2\frac{(3/5)^x}{\ln(3/5)}+3\frac{(2/5)^x}{\ln(2/5)}+c$.

469. $\int(\frac{2}{1+x^2}-\text{ch }x+3e^x)dx=2\int\frac{dx}{1+x^2}-\int\text{ch }xdx+3\int e^x dx=2\cdot\text{arc tg }x-\text{sh }x+3e^x+c$.

470. $\int(\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}+\frac{1}{4+x^2})dx=\int(\frac{1}{\sqrt{3^2-x^2}}+\frac{1}{2^2+x^2})dx=\text{arc sin}\frac{x}{3}+\frac{1}{2}\text{arc tg}\frac{x}{2}+c$.

471. $\int(\frac{3}{2+x^2}-\text{tg}^2x+\frac{2}{\sqrt{3-x^2}})dx=3\int\frac{dx}{(\sqrt{2})^2+x^2}-\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx+2\int\frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{3})^2-x^2}}=$
$=\frac{3}{\sqrt{2}}\text{arc tg}\frac{x}{\sqrt{2}}-\int\frac{1}{\cos^2 x}dx+\int dx+2\cdot\text{arc sin}\frac{x}{\sqrt{3}}+c=$
$=\frac{3}{\sqrt{2}}\text{arc tg }\frac{x}{\sqrt{2}}-\text{tg }x+x+2\text{arc sin}\frac{x}{\sqrt{3}}+c$.

472. $\int\frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{4(\frac{9}{4}-x^2)}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{9}{4}-x^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{(\frac{3}{2})^2-x^2}}=\frac{1}{2}\text{arc sin}\frac{2}{3}x+c$.

473. $\int\frac{dx}{\cos^2 x\sin^2 x}=\int\frac{(\cos^2 x+\sin^2 x)dx}{\cos^2 x\sin^2 x}=\int\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx+\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx=$
$=\int\frac{dx}{\sin^2 x}+\int\frac{dx}{\cos^2 x}=-\text{ctg }x+\text{tg }x+c$.

♠ZADACI ZA VJEŽBU♠

474. $\int x(2-x)^2dx$.
475. $\int\frac{x-5}{x^5}dx$.
476. $\int\frac{(3x-1)^2}{x^4}dx$.
477. $\int\frac{(x+1)^3}{3x^8}dx$.
478. $\int(\sqrt{x^3}-3\sqrt{x^5}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{x})dx$.
479. $\int(\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{3}{2\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x^5}})dx$.
480. $\int\sqrt{x}(x-\sqrt[3]{x})dx$.
481. $\int\frac{(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})^2}{\sqrt[4]{x}}dx$.
482. $\int\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{x^{11}}}dx$.
483. $\int\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx$.
484. $\int(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})^2dx$.
485. $\int(\sqrt{x^3}-\frac{1}{\sqrt{x^3}})^2dx$.
486. $\int\frac{(1+x)^2}{x^3+x}dx$
487. $\int 2^x8^xdx$.
488. $\int\frac{2^x+5^x}{10^x}dx$.
489. $\int\frac{dx}{\sqrt{b^2-a^2x^2}}$.
490. $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx$.
491. $\int\frac{\sin 2x}{\sin x\cos^3 x}dx$.

492. $\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x\, \mathrm{sh}^2 x}$. 493. $\int (\mathrm{tg}\, x - \mathrm{ctg}\, x)^2 dx$.

➢ RJEŠENJA

474. $2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + c.$ **475**. $-\frac{1}{3x^3} + \frac{5}{4x^4} + c.$ **476**. $-\frac{9}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{3x^3} + c.$

477. $-\frac{1}{12x^4} - \frac{1}{5x^5} - \frac{1}{6x^6} - \frac{1}{21x^7} + c.$ **478**. $\frac{2}{5}\sqrt{x^5} - \frac{6}{7}\sqrt{x^7} + \frac{1}{4}\sqrt[3]{x^4} + c.$

479. $4\sqrt{x} - \frac{9}{4}\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{3\sqrt{x^3}} + c.$ **480**. $\frac{2}{5}\sqrt{x^5} - \frac{6}{11}\sqrt[6]{x^{11}} + c.$

481. $\frac{4}{7}\sqrt[4]{x^7} + \frac{24}{19}\sqrt[12]{x^{19}} + \frac{12}{17}\sqrt[12]{x^{17}} + c.$ **482**. $-\frac{15}{13}\frac{1}{\sqrt[15]{x^{13}}} + \frac{1}{x} + c.$ **483**. $\frac{8}{15}x^{15/8} + c.$

484. $\frac{1}{2}x^2 + 2x + \ln|x| + c.$ **485**. $\frac{1}{4}x^4 - 2x - \frac{1}{2x^2} + c.$ **486**. $\ln|x| + 2arctgx + c.$

487. $\frac{16^x}{\ln 16} + c.$ **488**. $-\frac{5^{-x}}{\ln 5} - \frac{2^{-x}}{\ln 2} + c.$ **489**. $\frac{1}{a}\arcsin\frac{ax}{b} + c.$ **490**. $-ctgx - tgx + c.$

491. $2tgx + c.$ **492**. $-thx - cthx + c.$ **493**. $tgx - ctgx - 4x + c.$

7.2 METODA SUPSTITUCIJE

Koristeći razne supstitucije integral može biti zamijenjen odgovarajućim jednostavnijim. Metodom supstitucije se integral ne rješava direktno kao u prethodnoj točki, nego se integriranje olakšava. Postupak supstitucije opisan je u sljedećem rezultatu:

♣<u>Teorem 16.</u> Neka je $f: R \to R$ neprekidna podintegralna funkcija, te neka je željena supstitucija dana funkcijom $x = \varphi(t)$ isto neprekidna s neprekidnom derivacijom $\varphi'(t)$. Tada vrijedi *formula za supstituciju u neodređenom integralu*:

$$\int f(x)dx = \begin{vmatrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{vmatrix} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

.♣

Kako vidimo, supstituciju $x = \varphi(t)$ i pripadnu derivaciju $dx = \varphi'(t)dt$ zapisujemo u zagradi oblika |…..|, čime u potpunosti realiziramo namjeru rješavanja integrala metodom supstitucije.

U sljedećim primjerima pročitati te ponovno samostalno riješiti dane integrale.

494. $\int (3+5x)^8 dx = \begin{vmatrix} 3+5x=t \\ 5dx=dt \\ dx=\frac{1}{5}dt \end{vmatrix} = \frac{1}{5}\int t^8 dt = \frac{1}{45}t^9 + c = \frac{1}{45}(3+5x)^9 + c$.

495. $\int \frac{dx}{(2-3x)^9} = \begin{vmatrix} 2-3x=t \\ -3dx=dt \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^9} = -\frac{1}{3}\int t^{-9}dt = \frac{1}{24}t^{-8} + c = \frac{1}{24(2-3x)^8} + c$.

496. $\int \sqrt{x-4}dx = \begin{vmatrix} x-4=t \\ dx=dt \end{vmatrix} = \int \sqrt{t}dt = \int t^{1/2}dt = \frac{2}{3}t^{3/2} + c = \frac{2}{3}\sqrt{(x-4)^3} + c$.

497. $\int \sqrt[3]{4x-1}dx = \begin{vmatrix} 4x-1=t \\ 4dx=dt \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\int \sqrt[3]{t}dt = \frac{1}{4}\int t^{1/3}dt = \frac{3}{16}t^{4/3} + c = \frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x-1)^4} + c$.

498. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(2x+4)^3}} = \begin{vmatrix} 2x+4=t \\ 2dx=dt \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt[4]{t^3}} = \frac{1}{2}\int t^{-3/4}dt = 2t^{1/4} + c = 2\cdot\sqrt[4]{2x+4} + c$.

499. $\int \sin 10x dx = \begin{vmatrix} 10x=t \\ 10dx=dt \end{vmatrix} = \frac{1}{10}\int \sin t dt = -\frac{1}{10}\cos t + c = -\frac{1}{10}\cos 10x + c$.

500. $\int \frac{dx}{\cos^2 3x} = \begin{vmatrix} 3x=t \\ 3dx=dt \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{3}\operatorname{tg} t + c = \frac{1}{3}\operatorname{tg} 3x + c$.

501. $\int \cos(2-5x)dx = \begin{vmatrix} 2-5x=t \\ -5dx=dt \end{vmatrix} = -\frac{1}{5}\int \cos t dt = -\frac{1}{5}\sin t + c = -\frac{1}{5}\sin(2-5x) + c$.

502. $\int e^{3x+4}dx = \begin{vmatrix} 3x+4=t \\ 3dx=dt \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\int e^t dt = \frac{1}{3}e^t + c = \frac{1}{3}e^{3x+4} + c$.

Napomena: svaki se rezultat integriranja može jednostavno provjeriti, tako da dobiveni rezultat deriviramo, budući da znamo da derivacija integrala mora biti jednaka podintegralnoj funkciji!

503. $\int 7^{2x+1}dx = \begin{vmatrix} 2x+1=t \\ 2dx=dt \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\int 7^t dt = \frac{1}{2\ln 7}7^t + c = \frac{1}{2\ln 7}7^{2x+1} + c$.

504. $\int \frac{x}{(2x^2-1)^3}dx = \begin{vmatrix} 2x^2-1=t \\ 4xdx=dt \\ xdx=\frac{1}{4}dt \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^3} = \frac{1}{4}\int t^{-3}dt = -\frac{1}{8}t^{-2} + c = -\frac{1}{8(2x^2-1)^2} + c$.

505. $\int \frac{\sqrt{x}}{(2+\sqrt{x})}dx = \begin{vmatrix} 2+\sqrt{x}=t \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}dx=dt \\ dx=2(t-2)dt \end{vmatrix} = 2\int \frac{(t-2)^2}{t}dt = 2\int \frac{t^2-4t+4}{t}dt = 2\int (t-4+\frac{4}{t})dt =$

$$= t^2 - 8t + 8\ln t + c = (2+\sqrt{x})^2 - 8(2+\sqrt{x}) + 8\ln(2+\sqrt{x}) + c\,.$$

506. $$\int \frac{x}{1+\sqrt{x+1}}dx = \left| \begin{array}{l} 1+\sqrt{x+1} = t \\ \frac{1}{2\sqrt{x+1}}dx = dt \\ dx = 2(t-1)dt \\ x = (t-1)^2 - 1 \end{array} \right| = 2\int \frac{((t-1)^2-1)(t-1)}{t}dt = 2\int \frac{t^3-3t^2+2t}{t}dt =$$

$$= 2\int t^2 dt - 6\int t dt + 4\int dt = \frac{2}{3}t^3 - 3t^2 + 4t + c =$$

$$= \frac{2}{3}(1+\sqrt{x+1})^3 - 3(1+\sqrt{x+1})^2 + 4(1+\sqrt{x+1}) + c\,.$$

507. $$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = \left| \begin{array}{c} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{array} \right| = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + c = -\ln|\cos x| + c\,.$$

508. $$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx = \left| \begin{array}{c} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{1-t^2} = \int \frac{dt}{(1-t)(1+t)} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1-t} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t} = -\frac{1}{2}\ln|1-t| + \frac{1}{2}\ln|1+t| + c =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + c = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + c\,.$$

509. $$\int \frac{\ln^2 x}{x}dx = \left| \begin{array}{c} \ln x = t \\ \frac{1}{x}dx = dt \end{array} \right| = \int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 + c = \frac{1}{3}\ln^3 x + c\,.$$

510. $$\int \sin^4 x \cos x dx = \left| \begin{array}{c} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right| = \int t^4 dt = \frac{1}{5}t^5 + c = \frac{1}{5}\sin^5 x + c\,.$$

Napomena: zadatke ne treba raditi jedan za drugim mehanički, jer nije jedini cilj rješavanja zadatka dobiti točno rješenje; treba se malo istraživački poigrati, kao na primjer: razmisliti kako određeni tip podintegralne funkcije implicira određeni tip rješenja, ili usporediti težinu integriranja među raznim tipovima podintegralnih funkcija, ili pokušati zapamtiti neke lakše rezultate, kao npr. integrale funkcija $y = \sin 3x$, $y = e^{5x}$ i slično. Time razvijamo mnoge druge osobine, a samo integriranje postaje sporedna aktivnost.

511. $$\int x\sqrt{x+2}dx = \left| \begin{array}{l} x+2 = t \\ dx = dt \\ x = t-2 \end{array} \right| = \int (t-2)\sqrt{t}dt = \int t^{3/2}dt - 2\int t^{1/2}dt = \frac{2}{5}t^{5/2} - \frac{4}{3}t^{3/2} + c =$$

$$= \frac{2}{5}\sqrt{(x+2)^5} - \frac{4}{3}\sqrt{(x+2)^3} + c\,.$$

512. $$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x} = t \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = dt \\ \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2dt \end{array} \right| = 2\int e^t dt = 2e^t + c = 2e^{\sqrt{x}} + c.$$

513. $$\int x(x^2+5)^{11}dx = \left| \begin{array}{l} x^2+5 = t \\ 2xdx = dt \\ xdx = \frac{1}{2}dt \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int t^{11}dt = \frac{1}{24}t^{12} + c = \frac{1}{24}(x^2+5)^{12} + c.$$

514. $$\int x^2\sin(2x^3+4)dx = \left| \begin{array}{l} 2x^3+4 = t \\ 6x^2dx = dt \\ x^2dx = \frac{1}{6}dt \end{array} \right| = \frac{1}{6}\int \sin t dt = -\frac{1}{6}\cos t + c = -\frac{1}{6}\cos(2x^3+4) + c.$$

515. $$\int \frac{x}{\cos^2(x^2-4)}dx = \left| \begin{array}{l} x^2-4 = t \\ 2xdx = dt \\ xdx = \frac{1}{2}dt \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{2}\operatorname{tg} t + c = \frac{1}{2}\operatorname{tg}(x^2-4) + c.$$

516. $$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx = \int \frac{e^x e^x}{\sqrt{e^x+1}}dx = \left| \begin{array}{l} e^x+1 = t \\ e^x dx = dt \\ e^x = t-1 \end{array} \right| = \int \frac{(t-1)}{\sqrt{t}}dt = \int t^{1/2}dt - \int t^{-1/2}dt =$$

$$= \frac{2}{3}t^{3/2} - 2t^{1/2} + c = \frac{2}{3}\sqrt{(e^x+1)^3} - 2\sqrt{(e^x+1)} + c.$$

517. $$\int \frac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}}dx = \left| \begin{array}{c} 2^x + 2^{-x} = t \\ \ln 2(2^x - 2^{-x})dx = dt \\ (2^x - 2^{-x})dx = \frac{1}{\ln 2}dt \end{array} \right| = \frac{1}{\ln 2}\int \frac{dt}{t} = \frac{\ln t}{\ln 2} + c = \frac{1}{\ln 2}\ln(2^x + 2^{-x}) + c.$$

518. $$\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x+1}} = \left| \begin{array}{l} x+1 = t^2 \\ dx = 2tdt \\ x = t^2-1 \end{array} \right| = 2\int \frac{tdt}{(t^2+1)t} = 2\int \frac{dt}{t^2+1} = 2\operatorname{arc\,tg} t + c = 2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x+1} + c.$$

Napomena: nije dobro vježbati samo zadatke iste težine, na primjer, samo lakše zadatke; nakon određenog vremena, veoma je dobro prijeći i na teži tip zadataka, pa onda se vratiti na lakšu, i tako dalje. Ukoliko se vježba samo lakša grupa zadataka, tada dolazite u opasnost takozvanog *rutinskog rješavanja*, što se može pokazati negativnim na pismenom dijelu ispita, ako se pojavi za vas takozvani *nepoznati integral*. Tada će vas rutina vjerojatno zablokirati!

♠ZADACI ZA VJEŽBU♠

519. $\int \sqrt{4x-5}\,dx$.

520. $\int 3x^2\sqrt{x^3+4}\,dx$.

521. $\int \frac{dx}{(x-1)^4}$.

522. $\int \frac{2x}{(x^2+7)^4}dx$.

523. $\int \frac{3x^2+1}{\sqrt[3]{x^3+x}}dx$.

524. $\int \sin 3x \cos^3 3x\,dx$.

525. $\int \sin^{10} x \cos x\,dx$.

526. $\int \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}}dx$.

527. $\int \frac{\sin x}{(2+3\cos x)^2}dx$.

528. $\int (x^2+1)\sqrt{x-2}\,dx$.

529. $\int x e^{x^2/2}dx$.

530. $\int x^2 \sin\frac{x^3}{3}dx$.

531. $\int \frac{dx}{x\ln x}$.

532. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}(1+\sqrt[4]{x})}$.

533. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$.

534. $\int \frac{e^{2x}}{e^x-1}dx$.

535. $\int x^2(x-1)^{18}dx$.

536. $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x+1}}dx$.

537. $\int \frac{x}{1+x^4}dx$.

538. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}dx$.

539. $\int \frac{\operatorname{ctg} x}{\ln\sin x}dx$.

540. $\int \frac{\ln x}{x(4+\ln^2 x)}dx$.

➢ RJEŠENJA

519. $\frac{(4x-5)^{3/2}}{6}+c$. **520**. $\frac{2}{3}\sqrt{(x^3+4)^3}+c$. **521**. $-\frac{1}{3(x-1)^3}+c$. **522**. $-\frac{1}{3(x^2+7)^3}+c$.

523. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x^3+x)^2}+c$. **524**. $-\frac{1}{12}\cos^4 3x+c$. **525**. $\frac{1}{11}\sin^{11} x+c$. **526**. $\frac{2}{3}(\sqrt{x}-1)^3+c$.

527. $\frac{1}{6+9\cos x}+c$. **528**. $\frac{2}{7}\sqrt{(x-2)^7}+\frac{8}{5}\sqrt{(x-2)^5}+\frac{10}{3}\sqrt{(x-2)^3}+c$.

529. $e^{x^2/2}+c$. **530**. $-\cos\frac{x^3}{3}+c$. **531**. $\ln\ln x+c$. **532**. $4\ln(1+\sqrt[4]{x})+c$.

533. $\ln\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}+c$. **534**. $\ln(e^x-1)+e^x+c$.

535. $\frac{(x-1)^{21}}{21}+\frac{(x-1)^{20}}{10}+\frac{(x-1)^{19}}{19}+c$. **536**. $\cancel{\frac{3}{10}(x+1)^{2/3}}(2x-3)+c$. **537**. $\frac{1}{2}arctgx^2+c$.

538. $\frac{1}{3}\arcsin x^3+c$. **539**. $\ln\ln\sin x+c$. **540**. $\ln\sqrt{4+\ln^2 x}+c$.

7.3 PARCIJALNA INTEGRACIJA

Kao i kod supstitucije, parcijalnom integracijom dani integral mijenjamo s odgovarajućim jednostavnijim integralom. Često se postavlja pitanje: kada primijeniti parcijalnu integraciju, a ne supstituciju? Ukoliko se u podintegralnoj funkciji nalazi produkt od dvije takozvane raznorodne funkcije (npr. jedna algebarska a druga transcedentna), ili se nalazi jedna ili dvije transcedentne funkcije, tako da niti jedna supstitucija ne daje rezultat, tada obavezno primjenjujemo parcijalnu integraciju. Na primjer, $f(x)=x\cos x$ ili $f(x)=\operatorname{arc\,tg} x$ ili $f(x)=e^{2x}\cos 3x$. Sama ideja parcijalne integracije sastoji se u tome da se produkt dviju funkcija zamijeni s produktom od derivacije prve i integralom druge, ili obratno. To se tehnički izvodi po sljedećem pravilu:

♣<u>Teorem 17.</u> Neka su dane dvije "dovoljno glatke" funkcije $y=f(x)$ i $y=g(x)$. Tada vrijedi formula parcijalne integracije:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)-\int g(x)f'(x)dx$$

ili, u radnom obliku,

$$\int udv = uv-\int vdu, \text{ gdje je } \left|\begin{array}{c} u=f(x) \\ du=f'(x)dx \\ dv=g'(x)dx \\ v=g(x) \end{array}\right| .$$ ♣

♥<u>Dokaz.</u> Znamo da derivacija produkta funkcija zadovoljava pravilo: $(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$. Direktnim integriranjem ove jednakosti, uz korištenje da je $\int (f\cdot g)'dx=f\cdot g$ što je definicija integrala, neposredno slijedi tražena formula parcijalne integracije. ♥

To znači da onu funkciju koju je bolje "poslati" u derivaciju označavamo sa "u" dok onu funkciju koju je bolje "poslati" u integral označavamo sa "dv". Na primjer, u produktu $y=x\cos x$ bolje je "poslati" $y=x$ u derivaciju, a $y=\cos x$ u integral, jer produkt derivacije prve i integrala druge funkcije je $y=1\cdot\sin x$, što je mnogo jednostavnije za integrirati od produkta $y=x\cos x$,odnosno:

541. $$\int x\cos xdx = \left|\begin{array}{c} u=x \\ du=dx \\ dv=\cos xdx \\ v=\int\cos xdx=\sin x \end{array}\right| = uv-\int vdu = x\sin x-\int \sin xdx = x\sin x+\cos x+c .$$

Naravno, mogli smo izabrati onu drugu, nepovoljniju, kombinaciju, odnosno poslati $y = x$ u integral, a $y = \cos x$ u derivaciju. Međutim, tada je produkt integrala prve i derivacije druge funkcije jednak funkciji $y = -\frac{1}{2}x^2 \sin x$, što je teže integrirati od zadane funkcije $y = x\cos x$.

Pročitati sve riješene primjere iz parcijalne integracije, pa potom sve zadatke samostalno riješiti, bez gledanja u postupak.

542. $$\int (2x-1)e^{4x}dx = \left| \begin{array}{c} u = 2x-1 \\ du = 2dx \\ dv = e^{4x}dx \\ v = \int e^{4x}dx = \frac{1}{4}e^{4x} \end{array} \right| = uv - \int vdu = (2x-1)\frac{1}{4}e^{4x} - \frac{2}{4}\int e^{4x}dx =$$

$$= \frac{2x-1}{4}e^{4x} - \frac{1}{8}e^{4x} + c.$$

543. $$\int x^3 \ln 2x dx = \left| \begin{array}{c} u = \ln 2x \\ du = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}x}dx \\ dv = x^3 dx \\ v = \frac{1}{4}x^4 \end{array} \right| = uv - \int vdu = (\ln 2x)\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{\cancel{8}}\int \frac{x^4}{x}dx = \frac{1}{4}x^4 \ln 2x - \frac{1}{\cancel{8}}\int x^3 dx =$$

$$= \frac{x^4 \ln 2x}{4} - \frac{1}{16}x^4 + c.$$

544. $$\int \mathrm{arc\,sin}x dx = \left| \begin{array}{c} u = \mathrm{arc\,sin}x \\ du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx \\ v = x \end{array} \right| = uv - \int vdu = (\mathrm{arc\,sin}x)\cdot x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \left| \begin{array}{c} 1-x^2 = t \\ -2xdx = dt \\ -xdx = \frac{1}{2}dt \end{array} \right| =$$

$$= x \cdot \arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = x \cdot \arcsin x + \frac{1}{2}\int t^{-1/2}dt = x \cdot \arcsin x + (1-x^2)^{1/2} + c.$$

Napomena: znamo da u parcijalnoj integraciji postoje najviše dvije mogućnosti za odluku koju od dvije podintegralne funkcije "poslati" u derivaciju a koju u integral; da bismo razvili osjećaj koji je bolji, a koji lošiji izbor za u i v, bilo bi dobro za svaki od ovih integrala, gdje je ponuđena bolja mogućnost, uraditi i onu lošiju. Naravno, ako je samo jedna podintegralna funkcija, tada imao samo jednu mogućnost!

545. $$\int \mathrm{arc\,tg}x dx = \left| \begin{array}{c} u = \mathrm{arc\,tg}x \\ du = \frac{1}{1+x^2}dx \\ dv = dx \\ v = x \end{array} \right| = uv - \int vdu = x \cdot \mathrm{arc\,tg}x - \int \frac{x}{1+x^2}dx = \left| \begin{array}{c} 1+x^2 = t \\ 2xdx = dt \\ xdx = \frac{1}{2}dt \end{array} \right| =$$

$$= x \cdot \mathrm{arc\,tg}\, x - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = x \cdot \mathrm{arc\,tg}\, x - \frac{1}{2}\ln t + c = x \cdot \mathrm{arc\,tg}\, x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c.$$

546. $$\int \frac{x}{\sin^2 x}dx = \left| \begin{array}{c} u = x \\ du = dx \\ dv = \frac{1}{\sin^2 x}dx \\ v = -\mathrm{ctg}\, x \end{array} \right| = uv - \int vdu = -x \cdot \mathrm{ctg}\, x + \int \mathrm{ctg}\, x dx = -x \cdot \mathrm{ctg}\, x + \int \frac{\cos x}{\sin x}dx =$$

$$=\begin{vmatrix} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{vmatrix} = -x\cdot\ \text{ctg}\, x + \int \frac{dt}{t} = -x\cdot\ \text{ctg}\, x + \ln t + c = -x\cdot\ \text{ctg}\, x + \ln\sin x + c\,.$$

547. $$\int e^{3x}\cos 2x dx = \begin{vmatrix} u = e^{3x} \\ du = 3e^{3x}dx \\ dv = \cos 2x dx \\ v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{vmatrix} = uv - \int v du = \frac{1}{2}e^{3x}\sin 2x - \frac{3}{2}\int e^{3x}\sin 2x dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = e^{3x} \\ du = 3e^{3x}dx \\ dv = \sin 2x dx \\ v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{vmatrix} = \frac{1}{2}e^{3x}\sin 2x - \frac{3}{2}[uv - \int v du] = \frac{1}{2}e^{3x}\sin 2x - \frac{3}{2}[-\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x + \frac{3}{2}\int e^{3x}\cos 2x dx] =$$

$$= \frac{1}{2}e^{3x}\sin 2x + \frac{3}{4}e^{3x}\cos 2x - \frac{9}{4}\int e^{3x}\cos 2x dx\,.$$

To znači da smo dvostrukom primjenom parcijalne integracije istog tipa za početni integral dobili jednakost:

$$\int e^{3x}\cos 2x dx = \frac{1}{2}e^{3x}\sin 2x + \frac{3}{4}e^{3x}\cos 2x - \frac{9}{4}\int e^{3x}\cos 2x dx\,,$$

iz čega, rješavanjem po traženom integralu (nepoznati integral na lijevu stranu a sve ostalo na desnu stranu), slijedi: $\int e^{3x}\cos 2x dx = \frac{2}{13}e^{3x}\sin 2x + \frac{3}{13}e^{3x}\cos 2x$.

548. $$\int x^2 e^x dx = \begin{vmatrix} u = x^2 \\ du = 2x dx \\ dv = e^x dx \\ v = e^x \end{vmatrix} = uv - \int v du = x^2 e^x - 2\int x e^x dx = \begin{vmatrix} u = x \\ du = dx \\ dv = e^x dx \\ v = e^x \end{vmatrix} =$$

$$= x^2 e^x - 2[uv - \int v du] = x^2 e^x - 2[x e^x - \int e^x dx] = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c\,.$$

♠ZADACI ZA VJEŽBU♠

549. $\int x e^{-x} dx$.

550. $\int x\sin x dx$.

551. $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$.

552. $\int \text{arc}\cos x dx$.

553. $\int e^x \sin x dx$.

554. $\int \sqrt{x}\ln x dx$.

555. $\int x^2 \sin 2x dx$.

556. $\int e^{-x}\sin x dx$.

557. $\int \cos(\ln x) dx$.

558. $\int x\cdot \text{arc tg} x dx$.

➢ RJEŠENJA

549. $-e^{-x}(x+1)+c.$

550. $-x\cos x + \sin x + c.$

551. $x\cdot tgx + \ln\cos x + c.$

552. $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+c.$ **553.** $\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)+c.$

554. $\frac{4}{3}x\sqrt{x}(\ln\sqrt{x}-\frac{1}{3})+c.$ **555.** $\frac{x}{2}\sin 2x+\frac{1-2x^2}{4}\cos 2x+c.$ **556.** $-\frac{e^{-x}}{2}(\sin x+\cos x)+c.$

557. $\frac{x}{2}(\cos\ln x+\sin\ln x)+c.$ **558.** $\frac{1}{2}(x^2+1)arctgx-\frac{1}{2}x+c.$

7.4 INTEGRALI TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA

Ako želimo uspješno rješavati integrale u kojima se pojavljuje produkt više različitih trigonometrijskih funkcija, potrebno je unaprijed znati razne supstitucije, koje su bazirane na odgovarajućim adicionim formulama. Stoga ćemo prije svakog podtipa u integriranju trigonometrijskih funkcija navesti sve adicione formule koje se koriste.

Prvo rješavamo integral tipa $\int\sin^m x\cos^{2n+1}xdx$ ili $\int\cos^m x\sin^{2n+1}xdx$, odnosno, kada je barem jedna od trigonometrijskih funkcija $\sin x$ ili $\cos x$ "napadnuta" neparnom potencijom oblika 2n+1 dok druga potencija može biti bilo što. Tada primjenjujemo sljedeći trik:

$$\int\sin^m x\cos^{2n+1}xdx=\int\sin^m x\cos^{2n}x\cos xdx=\int\sin^m x(\cos^2 x)^n\cos xdx=$$

$$=\int\sin^m x(1-\sin^2 x)^n\cos xdx=\left|\begin{matrix}\sin x=t\\ \cos xdx=dt\end{matrix}\right|=\int t^m(1-t^2)^n dt.$$

To znači da ovakav integral jednostavnom supstitucijom prevodimo u integral po odgovarajućem polinomu, što se pak direktno rješava. Pritom smo koristili adicionu formulu:

$$\boxed{\sin^2 x+\cos^2 x=1 \;\Leftrightarrow\; \cos^2 x=1-\sin^2 x \;\Leftrightarrow\; \sin^2 x=1-\cos^2 x.}$$

Na prethodno opisan način riješit ćemo slijedeće primjere:

559. $\int\sin^2 x\cos^5 xdx=\int\sin^2 x\cos^4 x\cos xdx=\int\sin^2 x(1-\sin^2 x)^2\cos xdx=$

$$=\left|\begin{matrix}\sin x=t\\ \cos xdx=dt\end{matrix}\right|=\int t^2(1-t^2)^2dt=\int(t^2-2t^4+t^6)dt=\frac{1}{3}t^3-\frac{2}{5}t^5+\frac{1}{7}t^7+c=$$

$$=\frac{\sin^3 x}{3}-\frac{2\sin^5 x}{5}+\frac{\sin^7 x}{7}+c.$$

560. $\int\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{\sin^2 x\sin x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{(1-\cos^2 x)\sin x}{\cos^2 x}dx=\left|\begin{matrix}\cos x=t\\ -\sin xdx=dt\end{matrix}\right|=$

$$=-\int\frac{1-t^2}{t^2}dt=-\int t^{-2}dt+\int dt=t^{-1}+t+c=\frac{1}{\cos x}+\cos x+c.$$

561. $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}}dx = \int \frac{\cos^2 x\cos x}{\sqrt{\sin x}}dx = \int \frac{(1-\sin^2 x)\cos x}{\sqrt{\sin x}}dx = \left|\begin{array}{c}\sin x = t\\ \cos x dx = dt\end{array}\right| =$

$$= \int \frac{(1-t^2)}{\sqrt{t}}dt = \int t^{-1/2}dt - \int t^{3/2}dt = 2t^{1/2} - \frac{2}{5}t^{5/2} + c = 2\sqrt{\sin x} - \frac{2}{5}\sqrt{\sin^5 x} + c\,.$$

Ako rješavamo integral oblika $\int \sin^{2m} x\cos^{2n} xdx$, gdje su obje funkcije $\sin x$ i $\cos x$ “napadnute” s parnim potencijama 2m, odnosno 2n, tada imamo nešto kompliciraniju situaciju od prethodnog slučaja. Jedino što možemo je koristiti adicione formule za snižavanje parne potencije nad $\sin x$ i $\cos x$:

$$\boxed{\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\,, \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x).}$$

To znači da na bilo kojem mjestu u integralu možemo iskoristiti ove dvije formule, kao u sljedećim riješenim primjerima:

562. $\displaystyle\int \sin^2 x\cos^2 xdx = \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\frac{1}{2}(1+\cos 2x)dx = \frac{1}{4}\int (1-\cos^2 2x)dx =$

$$= \frac{1}{4}\int \sin^2 2xdx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}(1-\cos 4x)dx = \frac{1}{8}\int dx - \frac{1}{8}\int \cos 4xdx = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + c\,.$$

563. $\displaystyle\int \sin^2 x\cos^4 xdx = \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)[\tfrac{1}{2}(1+\cos 2x)]^2 dx =$

$$= \frac{1}{8}\int (1-\cos 2x)(1+2\cos 2x+\cos^2 2x)dx = \frac{1}{8}\int [1+\cos 2x-\cos^2 2x-\cos^3 2x]dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8}\int \cos 2xdx - \frac{1}{8}\int \cos^2 2xdx - \frac{1}{8}\int \cos^3 2xdx = \frac{x}{8} + \frac{\sin 2x}{16} -$$

$$-\frac{1}{16}\int (1\cancel{-}\cos 4x)dx - \frac{1}{8}\int (1-\sin^2 2x)\cos 2xdx = \left|\begin{array}{c}\sin 2x = t\\ 2\cos 2xdx = dt\end{array}\right| =$$

$$= \frac{x}{8} + \frac{\sin 2x}{16} - \frac{x}{16} + \frac{1}{16}\int \cos 4xdx - \frac{1}{16}\int (1-t^2)dt = \frac{x}{16} + \frac{\sin 2x}{16} + \frac{\sin 4x}{64} - \frac{t}{16} + \frac{t^3}{48} =$$

$$= \frac{x}{16} + \frac{\sin 2x}{16} + \frac{\sin 4x}{64} - \frac{\sin 2x}{16} + \frac{\sin^3 2x}{48} + c = \frac{x}{16} + \frac{\sin^3 2x}{48} \cancel{+} \frac{\sin 4x}{64} + c\,.$$

Na kraju rješavamo tip integrala $\int \sin\alpha x\cos\beta xdx$ ili $\int \sin\alpha x\sin\beta xdx$ ili $\int \cos\alpha x\cos\beta xdx$, gdje su potencije jednostavne, ali su “frekvencije” α i β različite od 1. U ovom slučaju nam jedino mogu pomoći adicione formule za produkt trigonometrijskih funkcija sa proizvoljnim frekvencijama α i β:

$$\boxed{\begin{array}{c}\sin\alpha x\cos\beta x = \tfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x]\\ \sin\alpha x\sin\beta x = \tfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x]\\ \cos\alpha x\cos\beta x = \tfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)x + \cos(\alpha-\beta)x].\end{array}}$$

Sada direktnim uvrštavanjem prethodnih formula možemo riješiti pripadne integrale za bilo koje α i β, odnosno dobivamo formule:

$$\int \sin\alpha x\cos\beta x dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(\alpha+\beta)x}{\alpha+\beta} + \frac{\cos(\alpha-\beta)x}{\alpha-\beta}\right] + c,$$

$$\int \sin\alpha x\sin\beta x dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(\alpha-\beta)x}{\alpha-\beta} - \frac{\sin(\alpha+\beta)x}{\alpha+\beta}\right] + c,$$

$$\int \cos\alpha x\cos\beta x dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(\alpha-\beta)x}{\alpha-\beta} + \frac{\sin(\alpha+\beta)x}{\alpha+\beta}\right] + c.$$

Primijenimo sada ove formule na dva sljedeća primjera:

564. $\int \cos 3x \cos x dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(3-1)x}{3-1} + \frac{\sin(3+1)x}{3+1}\right] + c = \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{8} + c$.

565. $\int \sin 3x \cos 7x dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(3+7)x}{3+7} + \frac{\cos(3-7)x}{3-7}\right] + c = -\frac{\cos 10x}{20} + \frac{\cos 4x}{8} + c$.

Naravno, mnogi se integrali s trigonometrijskim funkcijama mogu riješiti uobičajenim supstitucijama kao u točki 9.2. Navodimo nekoliko jednostavnih primjera.

566. $\int \frac{\sin x}{2+\cos x} dx = \begin{vmatrix} 2+\cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{vmatrix} = -\int \frac{dt}{t} = -\ln t + c = -\ln(2+\cos x) + c$.

567. $\int \frac{\cos x}{4+\sin^2 x} dx = \begin{vmatrix} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{4+t^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{2} + c = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sin x}{2} + c$.

568. $\int \cos x(2-3\sin x)^5 dx = \begin{vmatrix} 2-3\sin x = t \\ -3\cos x dx = dt \\ \cos x dx = -\frac{1}{3}dt \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}\int t^5 dt = -\frac{1}{18}t^6 + c =$

$$= -\frac{1}{18}(2-3\sin x)^6 + c.$$

♠ZADACI ZA VJEŽBU♠

569. $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$.

570. $\int \cos^4 x \sin^3 x dx$.

571. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$.

572. $\int \sin^4 x dx$.

573. $\int \sin^4 x \cos^2 x dx$.

574. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx$.

575. $\int \frac{dx}{\cos^4 x - \sin^4 x}$. 576. $\int \sin 5x \cos x dx$. 577. $\int \sin x \cos 5x dx$.

578. $\int \cos 7x \cos 3x dx$. 579. $\int \sin 15x \sin 10x dx$. 580. $\int \sin x \sin 2x \sin 3x dx$

581. $\int \cos^3 x dx$. 582. $\int \sin^5 x dx$.

➢ RJEŠENJA

569. $\frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + c.$ **570.** $\frac{1}{7}\cos^7 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + c.$ **571.** $\frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + c.$

572. $\frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c.$ **573.** $\frac{x}{16} - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{48}\sin^3 2x + c.$ **574.** $-\frac{1}{3}ctg^3 x + c.$

575. $\cancel{-}\frac{1}{2}\ln(tg(x - \frac{\pi}{4})) + c.$ **576.** $-\frac{\cos 6x}{12} - \frac{\cos 4x}{8} + c.$ **577.** $-\frac{\cos 6x}{12} + \frac{\cos 4x}{8} + c.$

578. $\frac{\sin 10x}{20} + \frac{\sin 4x}{8} + c.$ **579.** $-\frac{\sin 25x}{50} + \frac{\sin 5x}{10} + c.$ **580.** $\frac{\cos 6x}{24} - \frac{\cos 4x}{16} - \frac{\cos 2x}{8} + c.$

581. $\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c.$ **582.** $-\frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{2\cos^3 x}{3} - \cos x + c.$

7.5 INTEGRALI RACIONALNIH FUNKCIJA

Znatan broj racionalnih funkcija može se integrirati primjenom klasičnih supstitucija, kao na početku poglavlja. Na primjer:

583. $$\int \frac{x^3}{2 - x^4} dx = \left| \begin{matrix} 2 - x^4 = t \\ -4x^3 dx = dt \end{matrix} \right| = -\frac{1}{4}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{4}\ln|t| + c = -\frac{1}{4}\ln|2 - x^4| + c.$$

584. $$\int \frac{x^2}{(x^3 + 4)^9} dx = \left| \begin{matrix} x^3 + 4 = t \\ 3x^2 dx = dt \end{matrix} \right| = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^9} = -\frac{1}{24}\frac{1}{t^8} + c = -\frac{1}{24}\frac{1}{(x^3 + 4)^8} + c.$$

585. $$\int \frac{x^2}{1 + x^6} dx = \left| \begin{matrix} x^3 = t \\ 3x^2 dx = dt \end{matrix} \right| = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}(t) + c = \frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}(x^3) + c.$$

Međutim, još je veći broj primjera gdje treba primijeniti neke nove “trikove” uz već postojeće supstitucije, kao što su: pretvaranje kvadratnog trinoma u binom, rastavljanje razlomka na proste parcijalne razlomke, dijeljenje brojnika s nazivnikom i slično.

Kao prvo, ako je u nazivniku takozvani kvadratni trinom $ax^2 + bx + c$, odnosno kvadratna funkcija sa “srednjim” članom “bx”, koju ne možemo rastaviti na dva dijela prvog stupnja, tada treba trinom svesti na takozvani kvadratni binom, kao u sljedećem primjeru:

586. $$\int \frac{dx}{x^2-x+1} = \left| x^2-x+1=(x-\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{3}{4} \right| = \int \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \left| \begin{matrix} x-\frac{1}{2}=t \\ dx=dt \end{matrix} \right| =$$
$$= \int \frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2}{\sqrt{3}} t + c = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2}{\sqrt{3}} (x-\tfrac{1}{2}) + c\,.$$

587. $$\int \frac{dx}{2x^2+4x+6} = \left| 2x^2+4x+6 = 2(x^2+2x+3) = 2[(x+1)^2+2] = 2(x+1)^2+4 \right| =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1)^2+2} = \left| \begin{matrix} x+1=t \\ dx=dt \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{t}{\sqrt{2}} + c = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + c\,.$$

588. $$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \left| 2x-x^2 = 1-(1-x)^2 \right| = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(1-x)^2}} = \left| \begin{matrix} 1-x=t \\ -dx=dt \end{matrix} \right| =$$
$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \operatorname{arc\,cos} t + c = \operatorname{arc\,cos}(1-x) + c\,.$$

Ako ipak možemo kvadratni trinom ax^2+bx+c rastaviti na dva dijela prvog stupnja odnosno na “proste” faktore, tada radimo rastav razlomka na takozvane “parcijalne razlomke”, kao u sljedećim primjerima (takozvano abecediranje razlomaka):

589. $$\int \frac{dx}{1-x^2} = \int \frac{dx}{(1-x)(1+x)} = \left| \tfrac{1}{(1-x)(1+x)} = \tfrac{A}{1-x} + \tfrac{B}{1+x} \right| = A\int \frac{dx}{1-x} + B\int \frac{dx}{1+x} =$$
$$= \left| \tfrac{1}{(1-x)(1+x)} = \tfrac{A}{1-x} + \tfrac{B}{1+x} = \tfrac{(A-B)x+(A+B)}{(1-x)(1+x)} \Rightarrow \begin{matrix} A-B=0 \\ A+B=1 \end{matrix} \Rightarrow A=B=1/2 \right| =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1-x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x} = -\frac{1}{2}\ln|1-x| + \frac{1}{2}\ln|1+x| + c = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c\,.$$

590. $$\int \frac{x}{x^2+5x+6}dx = \left| \frac{x}{x^2+5x+6} = \frac{x}{(x+3)(x+2)} = \frac{3}{x+3} - \frac{2}{x+2} \right| = 3\int \frac{dx}{x+3} - 2\int \frac{dx}{x+2} =$$
$$= 3\ln|x+3| - 2\ln|x+2| + c\,.$$

Ako se u nazivniku pojavi “prosti “ faktor stupnja jedan, ali s potencijom nad njim većom od jedan (npr. x^3), tada moramo u rastavu na parcijalne razlomke uzeti onoliko novih razlomaka, kolika je ta potencija. Na primjer:

591. $$\int \frac{x^2+1}{x^4-x^3}dx = \int \frac{x^2+1}{x^3(x-1)}dx = \left| \tfrac{x^2+1}{x^3(x-1)} = \tfrac{A}{x} + \tfrac{B}{x^2} + \tfrac{C}{x^3} + \tfrac{D}{x-1} \right| = A\int \frac{dx}{x} + B\int \frac{dx}{x^2} + C\int \frac{dx}{x^3} +$$

$$+D\int\frac{dx}{x-1}=\left|\begin{array}{c}\frac{x^2+1}{x^3(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x-1}=\frac{(A+D)x^3+(-A+B)x^2+(-B+C)x-C}{x^3(x-1)}\Rightarrow\begin{array}{c}A+D=0\\-A+B=1\\-B+C=0\\-C=1\end{array}\Rightarrow\begin{array}{c}A=-2\\B=-1\\C=-1\\D=2\end{array}\end{array}\right|=$$

$$=-2\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{x^2}-\int\frac{dx}{x^3}+2\int\frac{dx}{x-1}=-2\ln|x|+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+2\ln|x-1|+c.$$

592. $$\int\frac{x^2+3x+3}{x(x+2)^2}dx=\left|\frac{x^2+3x+3}{x(x+2)^2}=\frac{3}{4x}+\frac{1}{4(x+2)}-\frac{1}{2(x+2)^2}\right|=$$

$$=\frac{3}{4}\int\frac{dx}{x}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+2}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+2)^2}=\frac{3}{4}\ln|x|+\frac{1}{4}\ln|x+2|+\frac{1}{2}\frac{1}{x+2}+c.$$

Ako je u nazivniku pak “prosti” faktor stupnja dva, a nad njim potencija veća od jedan (npr. $(x^2+1)^3$, tada u rastavu na parcijalne razlomke isto tako uzimamo onoliko novih razlomaka, kolika je ta potencija. Na primjer:

593. $$\int\frac{x^3-x}{(x^2+1)^2}dx=\left|\frac{x^3-x}{(x^2+1)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}\right|=\int\frac{Ax+B}{x^2+1}dx+\int\frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}dx=$$

$$=\left|\frac{x^3-x}{(x^2+1)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}=\frac{Ax^3+Bx^2+(A+C)x+(B+D)}{(x^2+1)^2}\Rightarrow\begin{array}{c}A=1\\B=0\\A+C=-1\\B+D=0\end{array}\Rightarrow\begin{array}{c}A=1\\B=0\\C=-2\\D=0\end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{x}{x^2+1}dx-2\int\frac{x}{(x^2+1)^2}dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\frac{1}{x^2+1}+c.$$

594. $$\int\frac{dx}{x(1+x^2)^2}=\left|\frac{1}{x(1+x^2)^2}=\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}-\frac{x}{(1+x^2)^2}\right|=$$

$$=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{x}{1+x^2}dx-\int\frac{x}{(1+x^2)^2}dx=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2(1+x^2)}+c.$$

Ukoliko je stupanj brojnika veći ili jednak od stupnja nazivnika, tada je prije primjene prethodnih “trikova” potrebno podijeliti brojnik s nazivnikom te dobiti razlomke u kojima je stupanj nazivnika veći od stupnja brojnika. Naravno, detaljni postupak za pripadno dijeljenje se radi na predavanjima i vježbama, a ovdje ćemo koristiti samo krajnji razultat dijeljenja, jer nam to nije cilj, već sredstvo za rješavanje integrala ovakvog tipa. Na primjer:

595. $$\int\frac{x^5+1}{x^2+1}dx=\left|\frac{x^5+1}{x^2+1}=x^3-x+\frac{x+1}{x^2+1}\right|=\int(x^3-x)dx+\int\frac{x+1}{x^2+1}dx=$$

$$=\int x^3dx-\int xdx+\int\frac{x}{x^2+1}dx+\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\operatorname{arc\,tg}x+c\,.$$

596. $$\int\frac{x^3}{(x-1)(x^2-4)}dx=\left|\frac{x^3}{(x-1)(x^2-4)}=1+\frac{x^2+4x-4}{(x-1)(x^2-4)}\right|=\int dx+\int\frac{x^2+4x-4}{(x-1)(x^2-4)}dx=$$

$$=\left|\frac{x^2+4x+4}{(x-1)(x^2-4)}=-\frac{1}{3}\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}-\frac{2}{3}\frac{1}{x+2}\right|=x-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1}+2\int\frac{dx}{x-2}-\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x+2}=$$

$$=x-\frac{1}{3}\ln|x-1|+2\ln|x-2|-\frac{2}{3}\ln|x+2|+c\,.$$

597. $$\int\frac{2x^4-x^3-5x^2-3x+10}{x^3-x^2-4x+4}dx=\left|\frac{2x^4-x^3-5x^2-3x+10}{x^3-x^2-4x+4}=2x+1+\frac{4x^2-7x+6}{x^3-x^2-4x+4}\right|=$$

$$=\int(2x+1)dx+\int\frac{\cancel{2x^4-x^3-5x^2-3x+10}}{x^3-x^2-4x+4}dx=$$ dijeljenje brojnika i nazivnika=

$$=\left|\frac{2x^4-x^3-5x^2-3x+10}{x^3-x^2-4x+4}=\frac{-1}{x-1}+\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x+2}\right|=$$ uvrstiti u prethodni integral=

$$=2\int xdx+\int dx-\int\frac{dx}{x-1}+2\int\frac{dx}{x-2}+3\int\frac{dx}{x+2}=$$

$$=x^2+x-\ln|x-1|+2\ln|x-2|+3\ln|x+2|+c.$$

♠ZADACI ZA VJEŽBU♠

598. $\int\frac{2x+3}{x^2+3x-10}dx$.

599. $\int\frac{x}{(x+1)(2x+1)}dx$.

600. $\int\frac{3x^2-2x-4}{(x-1)(x^2-4)}dx$.

601. $\int\frac{x^3-x+2}{x^2-1}dx$.

602. $\int\frac{x^4+1}{x^3-x}dx$.

603. $\int\frac{x+2}{(x+3)^2}dx$.

604. $\int\frac{x^2+2x}{(x+1)^4}dx$.

605. $\int\frac{dx}{x^3+x^4}$.

606. $\int\frac{x^2-3x}{(x+1)(x-1)^2}dx$.

607. $\int\frac{dx}{x^4-1}$.

608. $\int\frac{xdx}{x^3-1}$.

609. $\int\frac{dx}{x^3+x^2+x+1}$.

➢ RJEŠENJA

598. $\ln(x^2+3x-10)+c.$ **599.** $\ln\dfrac{x+1}{\sqrt{2x+1}}+c.$ **600.** $\ln((x-1)(x^2-4))+c.$

601. $\dfrac{x^2}{2}+\ln\dfrac{x-1}{x+1}+c.$ **602.** $\dfrac{x^2}{2}+\ln\dfrac{x^2-1}{x}+c.$ **603.** $\dfrac{1}{x+3}+\ln(x+3)+c.$

604. $\dfrac{1}{3(x+1)^3}-\dfrac{1}{x+1}+c.$ **605.** $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2x^2}+\ln\dfrac{x}{x+1}+c.$ **606.** $\dfrac{1}{x-1}+\ln(x+1)+c.$

607. $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x-1}{x+1}-\dfrac{1}{2}arctgx+c.$ **608.** $\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+x+1}}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}arctg\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}+c.$

609. $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}+\dfrac{1}{2}arctgx+c.$

Pojam neodređenog integrala vezan je za dvojicu velikih matematičara: Leibnitza (Lajbnic) i Newtona (Njutn). Stoga smatramo zanimljivim iznijeti neke osnovne povijesne podatke i činjenice o dotičnoj dvojici. Pri tome ćemo o Newtonu govoriti na kraju sljedećeg poglavlja, kad budemo govorili o određenim integralima i površinama ravninskih likova, što je Newton prvi inicirao.

Gottfried Wilhelm von Leibnitz

Rođen: 1. lipnja 1646. u Leipzigu, Saxonija (Njemačka)
Umro: 14. studenog 1716. u Hannoveru, Hanover (Njemačka)

Leibnitza je povijest označila kao jednog od najvećih univerzalnih genija. Zašto?

Kao prvo bio je uspješan diplomata i državnik, što mu je omogućilo da putuje Europom, te razmjenjuje ideje, čita dostignuća drugih i uči od njih, te da prezentira ono što je sam stvorio. Na primjer:

- 1672. godine, za diplomatskog posjeta Parizu, počeo je učiti modernu matematiku od Huygensa (Hajgens);
- potom odlazi na tri mjeseca u London, kao izaslanik izbornog kneza, gdje se, osim obaveza u Kraljevskom društvu, sastaje i s engleskim matematičarima, gdje im tumači neke svoje matematičke metode;
- godine 1676. napušta Pariz i putuje je za Hanover da bi ušao u službu vojvode od Brunswick-Luneburga, u ulozi povjesničara;
- tada je, kao povjesničar, u razmaku od 1687.-1690., proputovao cijelu Njemačku, Austriju i Italiju.

Bio je pravnik, povjesničar, logičar, metafizičar, filozof, književnik, a pored svega toga, bio je i matematičar. Čime god da se bavio, bio je izuzetno plodan i moderan u smislu svog vremena. Pamti se da je u ono vrijeme genijalnost njegovih pravnih postulata malo tko mogao i htio razumjeti. Primio je diplomu doktorskog stupnja iz prava u svojoj dvadesetoj godini, 5. studenog 1666. Sam je bio svjestan svoje univerzalnosti, a zapamćena je njegova izreka:

> *Imam tako mnogo ideja da one s vremenom mogu biti korisne ako drugi, mnogo prodorniji od mene, jednog dana dublje uđu u njih i pridruže ljepotu svojih misli mojem djelu* – G.W. Leibnitz.

Matematikom se intenzivnije bavi od 1672. godine, pod utjecajem Huygensa. Godine 1675. piše rad u kojem otkriva "osnovni teorem diferencijalnog računa":

$$\frac{d}{dx}(f \cdot g) = f \cdot \frac{dg}{dx} + g \cdot \frac{df}{dx}.$$

U tom istom radu, po prvi put je uveden pojam neodređenog integrala $\int f(x)dx$. Potom, 1676. godine otkriva familijarni rezultat sa prethodnim: $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}dx$. Godine 1701. objavljuje radove o aritmetici binarnog sistema, te o determinantama.

Na kraju recimo da je u povijesti ostao nerazjašnjen delikatan odnos između njega i Newtona, s obzirom da su obojica u isto vrijeme otkrivali diferencijalni i integralni račun, ali na različite načine i s različitim ciljem. Isto tako, dosta je diskutabilna neuspješna prepiska koja se vodila među njima.